



Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Domingo 26 de octubre | CIMAT Guanajuato

Selectivo Final, Día 2

Problema 4.

Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB = AC$. La circunferencia \mathcal{K} de diámetro BC corta a los segmentos AB y AC en puntos D y E respectivamente. Sean X un punto en \mathcal{K} para el cual XE y DC son paralelas y Y un punto en BX para el cual AY es perpendicular a BX . Demuestra que existe un punto en el segmento AC el cual es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos X, Y y E .

Problema 5.

Manuel escribirá y subrayará parejas (a, b) de enteros con $a, b \geq 0$ en un pizarrón. En cada turno él escribe dos parejas de la siguiente manera: él selecciona una pareja no subrayada (n, k) con $0 < k < n$; subraya dicha pareja y escribe ahora las parejas $(n - 1, k - 1)$ y $(n - 1, k)$. Manuel comienza con la pareja $(2000, 25)$ escrita. Si hay alguna pareja no subrayada sobre la que Manuel pueda aplicar aplicar este turno, lo hace. De entre las parejas subrayadas por Manuel ¿cuántas distintas hay?

Problema 6.

Se tienen mil letras alrededor de una circunferencia, cada una de ellas siendo una A , una B o una C . Una *operación* consiste en tomar dos letras distintas que estén en posiciones consecutivas y sustituir ambas por la tercera letra que no es ninguna de las dos que se tomaron. Por ejemplo si tomas las letras B y C se sustituirían ambas por la A . Demuestra que es posible mediante estas operaciones que todas las letras sean la misma en algún momento y que la letra que queda en este momento no depende de como se hicieron las operaciones.