



Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Domingo 26 de octubre | CIMAT Guanajuato

## Selectivo Final, Día 2

---

### Problema 4.

Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo con  $AB = AC$ . La circunferencia  $\mathcal{K}$  de diámetro  $BC$  corta a los segmentos  $AB$  y  $AC$  en puntos  $D$  y  $E$  respectivamente. Sean  $X$  un punto en  $\mathcal{K}$  para el cual  $XE$  y  $DC$  son paralelas y  $Y$  un punto en  $BX$  para el cual  $AY$  es perpendicular a  $BX$ . Demuestra que existe un punto en el segmento  $AC$  el cual es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos  $X, Y$  y  $E$ .

### Problema 5.

Manuel escribirá y subrayará parejas  $(a, b)$  de enteros con  $a, b \geq 0$  en un pizarrón. En cada turno él escribe dos parejas de la siguiente manera: él selecciona una pareja no subrayada  $(n, k)$  con  $0 < k < n$ ; subraya dicha pareja y escribe ahora las parejas  $(n-1, k-1)$  y  $(n-1, k)$ . Manuel comienza con la pareja  $(2000, 25)$  escrita. Si hay alguna pareja no subrayada sobre la que Manuel pueda aplicar aplicar este turno, lo hace. De entre las parejas subrayadas por Manuel ¿cuántas distintas hay?

### Problema 6.

Se tienen mil letras alrededor de una circunferencia, cada una de ellas siendo una  $A$ , una  $B$  o una  $C$ . Una *operación* consiste en tomar dos letras distintas que estén en posiciones consecutivas y sustituir ambas por la tercera letra que no es ninguna de las dos que se tomaron. Por ejemplo si tomas las letras  $B$  y  $C$  se sustituirían ambas por la  $A$ . Demuestra que es posible mediante estas operaciones que todas las letras sean la misma en algún momento y que la letra que queda en este momento no depende de como se hicieron las operaciones.